Material Teórico - Redução ao Primeiro Quadrante e Funções Trigonométricas

Paridade das Funções Seno e Cosseno

Primeiro Ano do Ensino Médio

Autor: Prof. Fabrício Siqueira Benevides
Revisor: Prof. Antonio Caminha M. Neto

16 de fevereiro de 2019

1 Paridade de funções

Uma função f com valores reais é chamada de *função par* (ou simplesmente *par*) quando para todo x no domínio de f temos que $-x$ também está no domínio e vale que $f(-x) = f(x)$; e ela é chamada de *função ímpar* (ou apenas ímpar) quando para todo x em seu domínio temos $-x$ no domínio e $f(-x) = -f(x)$.

Observe que esse conceito é bem diferente do uso mais comum das palavras "par" e "ímpar", mas é inspirado por ele, conforme veremos no exemplo abaixo. Lembre-se de que um número inteiro é chamado de par quando ele é múltiplo de 2 (ou seja, é duas vezes um número inteiro) e é chamado de ímpar caso contrário. Assim, os números do conjunto $\{\ldots, -2, 0, 2, 4, 6, \ldots\}$ são pares, enquanto os do conjunto $\{\ldots, -3, -1, 1, 3, 5, \ldots\}$ são ímpares. Porém, números não inteiros, como $1/2$, $\sqrt{2}$ ou π, não são considerados pares nem ímpares.

Exemplo 1. *Seja n um número inteiro positivo. Considere a função potência $f(x) = x^n$, com domínio $\mathbb{R}$. Quando n é um número par, temos que $f(x)$ é uma função par; quando n é um número impar, a função $f(x)$ é ímpar.*

Solução. Para verificar isso, lembre-se primeiro de que a lei dos sinais nos diz que

$$(-1)^n = \begin{cases} 1, & \text{quando } n \text{ é par,} \\ -1, & \text{quando } n \text{ é ímpar.} \end{cases}$$

Agora, seja x um número real qualquer. Queremos comparar os valores de $f(x)$ e $f(-x)$. Temos que,

$$\begin{aligned} f(-x) &= (-x)^n = (-1)^n \cdot x^n \\ &= (-1)^n f(x) = \begin{cases} f(x), & \text{quando } n \text{ é par,} \\ -f(x), & \text{quando } n \text{ é ímpar.} \end{cases} \end{aligned}$$

Em resumo, $f(-x) = f(x)$ para n par e $f(-x) = -f(x)$ para n ímpar. Como isso vale para qualquer valor de x, o resultado está provado. □

Em particular, o exemplo acima nos diz que $f(x) = x^2$ é uma função par e a função $g(x) = x^3$ é ímpar.

Veja que testar se $f(x)$ é uma função par involve verificar a condição $f(x) = f(-x)$ para todos os possíveis valores de x no domínio da função, não apenas para alguns valores (e o análogo vale para testar se $f(x)$ é ímpar). Por isso, na solução do exemplo acima precisamos fazer os cálculos de forma genérica, com a variável x, no lugar de apenas substituir x por um valor específico (como 1 ou 2). Por outro lado, para mostrar que uma função *não é* par, bastaria exibir um exemplo de um valor de x tal que $f(-x) \neq f(x)$.

Exemplo 2. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = x^3-x+1$ não é par nem ímpar.*

Solução. Se a função em questão fosse par, deveríamos ter que $f(-x) = f(x)$, ou seja, $(-x)^3 - (-x) + 1 = x^3 - x + 1$, para todo x real. Mas isso implicaria $-x^3 + x = x^3 - x$ ou, o que é o mesmo, $2(x^3 - x) = 0$, ou ainda $2x(x^2 - 1) = 0$. Veja que existem apenas três valores de x que satisfazem essa equação: 0, 1 e -1. Mas o fato disto valer para esses três valores, não garante que a função seja par, pois para outros valores de x teremos $f(x) \neq f(-x)$. Por exemplo $f(2) = 8 - 2 + 1 = 7$ e $f(-2) = -8 + 2 + 1 = -5$. Logo, $f(-2) \neq f(2)$.

Agora, vamos verificar que a função também não é ímpar. Se fosse, deveríamos ter que $f(-x) = -f(x)$, ou seja, $(-x)^3 - (-x) + 1 = -(x^3 - x + 1)$, ou ainda $-x^3 + x + 1 = -x^3 + x - 1$. Isso é falso para qualquer valor de x, já que $1 \neq -1$. Logo, a função também não é ímpar. □

Exemplo 3. *Mostre que a função $f(x) = x^2 + x$, com domínio nos reais, não é par nem é ímpar.*

Solução. Veja que $f(1) = 1^2 + 1 = 2$ enquanto $f(-1) = (-1)^2 + (-1) = 0$. Logo, $f(-1) \neq f(1)$ e $f(-1) \neq -f(1)$.

O argumento acima é suficiente para garantir que f não é par nem ímpar. Por outro lado, se tivesse acontecido dos valores de $f(-1)$ e $f(1)$ serem iguais, isto por si não garantiria que f é par, pois teríamos que considerar todos os outros possíveis valores para x. □

Devemos tomar cuidado também para não confundir os conceitos de número par com função par (ou de número ímpar com função ímpar).

Exemplo 4. *A função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 2x + 10$ não é uma função par nem ímpar. Por outro lado, para todo número inteiro x temos que $2x + 10$ é um número par.*

Solução. De fato, veja que $f(1) = 12$ e $f(-1) = 8$. Como $12 \neq 8$ e $12 \neq -8$, temos que $f(-1) \neq f(1)$ e $f(-1) \neq -f(1)$. Logo a função não é nem par nem ímpar.

Por outro lado, para qualquer número inteiro x, temos que $2x+10 = 2(x+5)$, o que é duas vezes o número inteiro $x + 5$. Logo, $2x + 10$ é um número par, sempre que x for inteiro. □

Exemplo 5. *Decida, com justificativa, se a função $f(x) = \frac{x}{x^2-1}$, com domínio $\mathbb{R} - \{-1,1\}$, é par ou ímpar.*

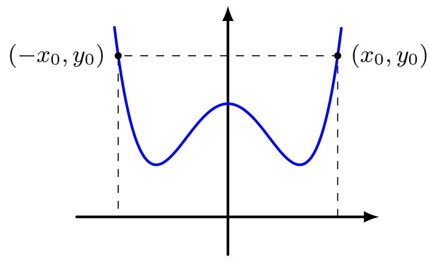
Solução. Suponha que x esteja no domínio de f, de sorte que $x \neq \pm 1$. Então, $-x \neq \pm 1$, o que nos permite calcular $f(-x)$. Temos que:

$$f(-x) = \frac{-x}{(-x)^2 - 1} = -\frac{x}{x^2 - 1} = -f(x).$$

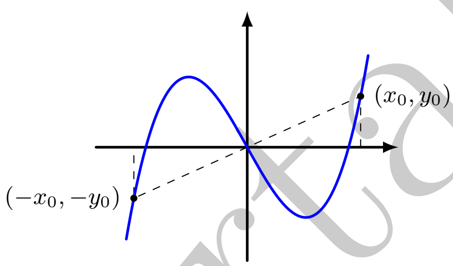
Logo, a função é ímpar. □

2 Interpretação gráfica

Dizer que uma função é par significa dizer que o eixo-y do plano cartesiano é um *eixo de simetria* para o gráfico de $y = f(x)$. Ou seja, o eixo-y funciona como um espelho. Para entender porque, suponha que $f(x)$ é uma função par qualquer. Se (x_0, y_0) é um ponto que pertence ao gráfico da função, então $y_0 = f(x_0)$. Mas, como a função é par, temos que $-x_0$ também pertence ao domínio da função e $f(-x_0) = f(x_0)$, isto é, $f(-x_0) = y_0$. Portanto, $(-x_0, y_0)$ também pertence ao gráfico. Acontece que, como mostrado na figura abaixo, $(-x_0, y_0)$ é justamente o ponto simétrico a (x_0, y_0) em relação ao eixo-y.



Dizer que uma função é ímpar significa que a origem do plano cartesiano, o ponto (0,0), é um centro de simetria para o gráfico de $y = f(x)$. O argumento aqui é semelhante ao que fizemos acima. Supunha que $f(x)$ seja ímpar e tome um ponto (x_0, y_0) em seu gráfico. Então, $y_0 = f(x_0)$ e, como f é ímpar, temos $f(-x_0) = -f(x_0)$, ou seja, $f(-x_0) = -y_0$. Logo, $(-x_0, -y_0)$ também é um ponto do gráfico, o qual é justamente o simétrico do ponto (x_0, y_0) em relação a (0,0) (veja a figura abaixo).



3 A paridade das funções seno e cosseno

Nesta seção, verificaremos que $\cos(x)$ é uma função par e $\operatorname{sen}(x)$ é uma função ímpar.

Inicialmente, observemos o Círculo Trigonométrico. Lembre-se de que para cada $x > 0$ representando o valor do comprimento de um arco, a ele fazemos corresponder um único ponto P sobre o o Círculo Trigonométrico, de tal forma que o arco partindo do ponto (1,0) até P possua comprimento x. Como vimos nas outras aulas, P é o ponto de coordenadas $(\cos(x), \operatorname{sen}(x))$. Além disso, arcos positivos são sempre medidos no *sentido anti-horário*.

Agora, considerando o número $-x$ (onde $x > 0$), a ele corresponde o ponto P', obtido percorrendo um arco de comprimento x no sentido *horário* (veja a Figura 1).

Por um lado, temos $P' = (\cos(-x), \operatorname{sen}(-x))$. Por outro, como P' é claramente o simétrico de P em relação ao eixo-x, temos que $P' = (\cos(x), -\operatorname{sen}(x))$ (perceba que, no caso da Figura 1, em que P está no primeiro quadrante, temos que P' está no quarto quadrante; portanto, sua abscissa é positiva e sua ordenada é negativa). Assim, obtemos

$$(\cos(-x), \operatorname{sen}(-x)) = (\cos(x), -\operatorname{sen}(x)),$$

ou seja,

$$\begin{aligned} \cos(-x) &= \cos(x) \\ \operatorname{sen}(-x) &= -\operatorname{sen}(x). \end{aligned}$$

Por fim, as últimas igualdades acima significam que $\cos(x)$ é uma função par e $\operatorname{sen}(x)$ é uma função ímpar.

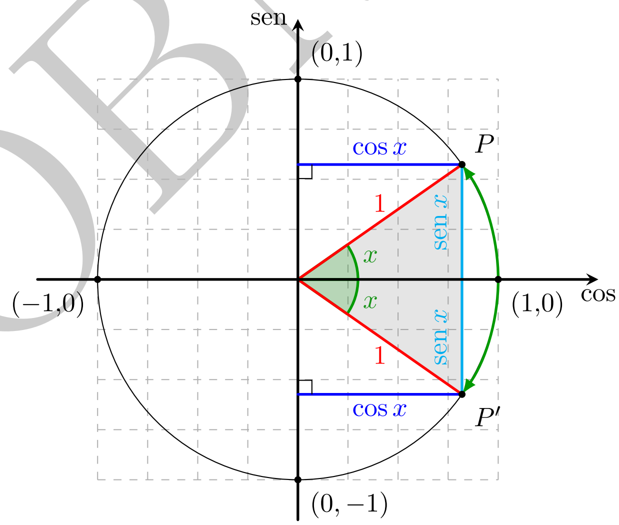


Figura 1: pontos P e P' sobre o Círculo Trigonométrico, simétricos em relação ao eixo-x (eixo dos cossenos).

Uma boa maneira de lembrar qual dentre as funções $\cos(x)$ e $\operatorname{sen}(x)$ é par e qual é ímpar é lembrar da Figura 1 e observar que, nela, as projeções de P e P' no eixo dos cossenos coincidem, enquanto suas projeções no eixo dos senos são simétricas em relação à origem.

Uma segunda maneira de perceber que $\cos(x)$ é par e $\operatorname{sen}(x)$ é ímpar é observar seus gráficos, os quais foram apresentados em uma aula anterior (veja a Figura 2). Essas funções são periódicas e possuem gráficos em forma de ondas. Contudo, o gráfico de $\cos(x)$ passa pelo ponto (0,1) enquanto o gráfico de $\operatorname{sen}(x)$ passa pelo ponto (0,0).

Levando em consideração as observações da seção anterior, veja que o gráfico de $\cos(x)$ é simétrico em relação

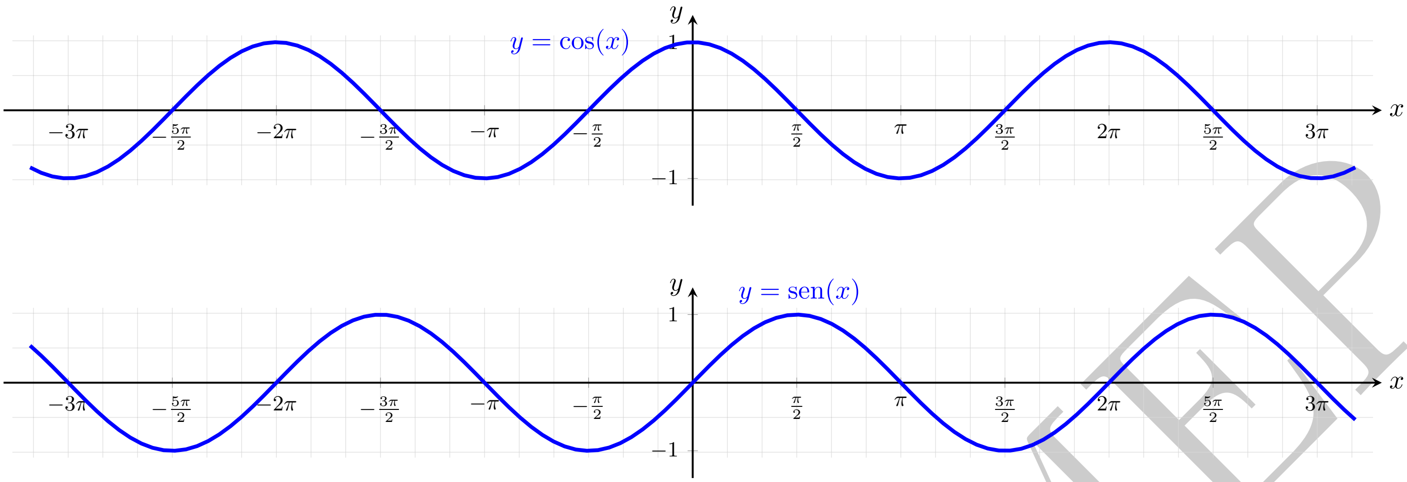


Figura 2: gráficos de seno e cosseno de -10 a 10.

ao eixo-y, enquanto que o de $\operatorname{sen}(x)$ é simétrico em relação ao ponto $(0,0)$. Logo, $\cos(x)$ é (função) par e $\operatorname{sen}(x)$ é (função) ímpar.

Veja que as duas maneiras acima de estabelecer que $\cos(x)$ é par e $\operatorname{sen}(x)$ é ímpar são coerentes com o fato de que o ponto P' da Figura 1 também é o ponto que corresponde ao arco de comprimento $2\pi - x$ (no sentido anti-horário) no Círculo Trigonométrico; logo, $P = (\cos(2\pi - x), \operatorname{sen}(2\pi - x))$. Por outro lado, como as funções $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$ possuem período iguai a 2π, temos que $\cos(2\pi - x) = \cos(-x)$ e $\operatorname{sen}(2\pi - x) = \operatorname{sen}(-x)$.

4 Exercícios resolvidos

Exemplo 6. *A função $f(x) = 3\operatorname{sen}(x)$ é par ou ímpar?*

Solução. Temos que

$$\begin{aligned} f(-x) &= 3\operatorname{sen}(-x) = 3 \cdot (-\operatorname{sen}(x)) \\ &= -3\operatorname{sen}(x) = -f(x). \end{aligned}$$

(Veja que, na segunda igualdade usamos o fato de que $\operatorname{sen}(x)$ é impar). Logo, $f(x)$ é uma função ímpar. □

Exemplo 7. *A função $f(x) = 7\operatorname{tg}(x)$ é par ou ímpar?*

Solução. Primeiramente, recorde que o domínio da função $\operatorname{tg}(x)$ (e, portanto, o de $f(x)$) é $\mathbb{R} \setminus \{ \pm \frac{\pi}{2}, \pm \frac{3\pi}{2}, \pm \frac{5\pi}{2}, \ldots \}$, simétrico em relação a 0. Agora, temos que

$$\begin{aligned} f(-x) &= 7\operatorname{tg}(-x) = \\ &= 7 \cdot \frac{\operatorname{sen}(-x)}{\cos(-x)} = 7 \cdot \frac{-\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} \\ &= -7 \cdot \frac{\operatorname{sen}(x)}{\cos(x)} = -7\operatorname{tg}(x) = -f(x). \end{aligned}$$

Logo, a função $f(x)$ é ímpar. □

Exemplo 8. *Calcule o valor de $\operatorname{tg}\left(-\frac{35\pi}{4}\right)$.*

Solução. Seguindo os mesmos passos do Exercício 7 conclui-se que $\operatorname{tg}(x)$ é uma função ímpar. Logo,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{35\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{35\pi}{4}\right).$$

A fim de encontrar a primeira determinação positiva do arco $35\pi/4$, dividimos 35 por 4, obtendo quociente 8 e resto 3; assim,

$$\frac{35\pi}{4} = \frac{(8 \cdot 4 + 3)\pi}{4} = 8\pi + \frac{3\pi}{4}.$$

Como a função $\operatorname{tg}(x)$ possui período π, temos que

$$\operatorname{tg}\left(\frac{35\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right).$$

Para terminar, invocamos novamente o fato de que $\operatorname{tg}(x)$ é ímpar e de período π para calcular

$$\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4} - \pi\right) = \operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{4}\right) = -1.$$

Então,

$$\operatorname{tg}\left(-\frac{35\pi}{4}\right) = -\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{4}\right) = 1.$$

□

Exemplo 9. *A soma $\sum_{k=0}^{n} \cos(\alpha + k\pi)$, para qualquer α, vale:*

(a) $-\cos(\alpha)$, *quando n é par.*

(b) $-\operatorname{sen}(\alpha)$, *quando n é ímpar.*

(c) $\cos(\alpha)$, *quando n é ímpar.*

(d) $\operatorname{sen}(\alpha)$, *quando n é par.*

(e) 0, *quando* n *é ímpar.*

Solução. Observe inicialmente que, percorrendo um arco de comprimento π a partir de um ponto P qualquer sobre o Círculo Trigonométrico, iremos parar no ponto P^*, simétrico de P em relação ao ponto $(0,0)$. Dessa forma, as coordenadas de P^* são os negativos das coordenadas de P, o que implica $\cos(x+\pi) = -\cos(x)$ para qualquer número real x.

Usando o fato deduzido acima, concluímos que

$$\cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha), \quad \cos(\alpha+2\pi) = \cos(\alpha),$$

$$\cos(\alpha+3\pi) = \cos(\alpha+\pi) = -\cos(\alpha)$$

e, em geral,

$$\cos(\alpha+k\pi) = (-1)^k\cos(\alpha).$$

Portanto,

$$\sum_{k=0}^{n}\cos(\alpha+k\pi) = \underbrace{\cos(\alpha)-\cos(\alpha)+\ldots+(-1)^n\cos(\alpha)}_{n+1 \text{ parcelas}},$$

com os sinais das parcelas da soma do segundo membro se alternando entre positivo e negativo.

Com isso, quando n for par (inclusive no caso em que $n = 0$) o resultado da soma é $\cos(\alpha)$. Por outro lado, quando n for ímpar, temos uma quantidade par de parcelas, logo, o resultado da soma é igual a 0. Assim, a alternativa correta é o item (e). □

Dicas para o Professor

Este módulo complementa o estudo das funções seno e cosseno. Ele pode ser apresentado em dois encontros de 50 minutos. A referência [1] desenvolve os rudimentos de Trigonometria necessários a aplicações geométricas. A referência [2] traz um curso completo de Trigonometria.

Sugestões de Leitura Complementar

1. A. Caminha. *Tópicos de Matemática Elementar, Volume 2: Geometria Euclidiana Plana.* SBM, Rio de Janeiro, 2013.

2. G. Iezzi *Os Fundamentos da Matemática Elementar, Volume 3: Trigonometria.* Atual Editora, Rio de Janeiro, 2013.